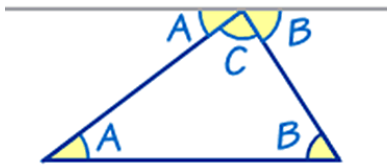
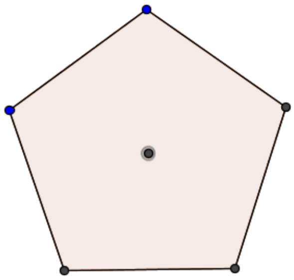
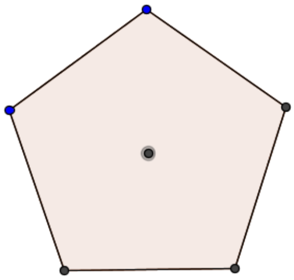
PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO

10 3º ESO

1. RELACIONES ANGULARES
2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS
3. TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES
4. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS
5. ÁREA DE LOS POLIGONOS

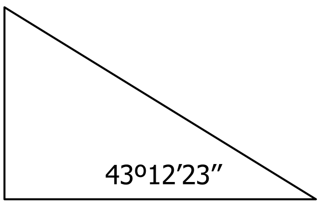
1. RELACIONES ANGULARES

ANGLES IN A POLYGON

Triangle In any triangle, the angles always sum to 180º	
Central angle The angle formed by two consecutive radii. Its size is $CA = \frac{360}{n}$; n is the number of sides.	
Interior angles An interior angle is the angle formed by two consecutive sides. $IA = 180 - CA$	

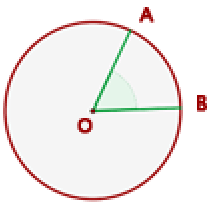
Example

Calculate the unknown acute angle in this right triangle.



ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ángulo central

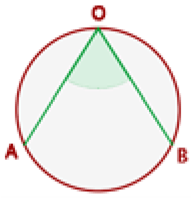


El ángulo central tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

$$\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$$

Ángulo inscrito

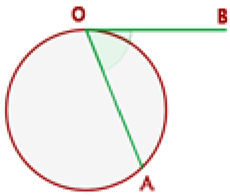


El ángulo inscrito tiene su vértice está en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

Ángulo semi-inscrito

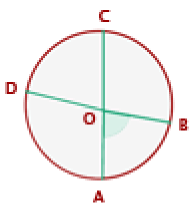


El vértice de ángulo semiinscrito está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$AOB = \frac{1}{2}OA$$

Ángulo interior



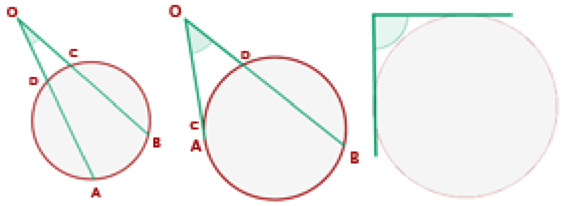
Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella.

Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} + \widehat{CD}\right)$$

Ángulo exterior

Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:



Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} - \widehat{CD}\right)$$

2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA

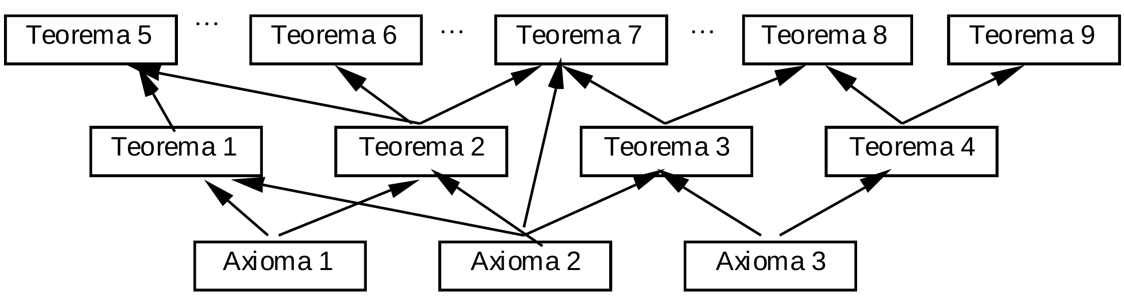
Deducción lógica de una proposición a partir de otras proposiciones ya establecidas.

Decimos deducción lógica; es decir, mediante razonamientos.

Una deducción experimental es la que se basa en la experiencia. Por ejemplo, el alcohol hierve a 80° C. En esta deducción hay unos resultados previos también. Por ejemplo, la dilatación de los cuerpos con la temperatura (fundamento del termómetro)

AXIOMA

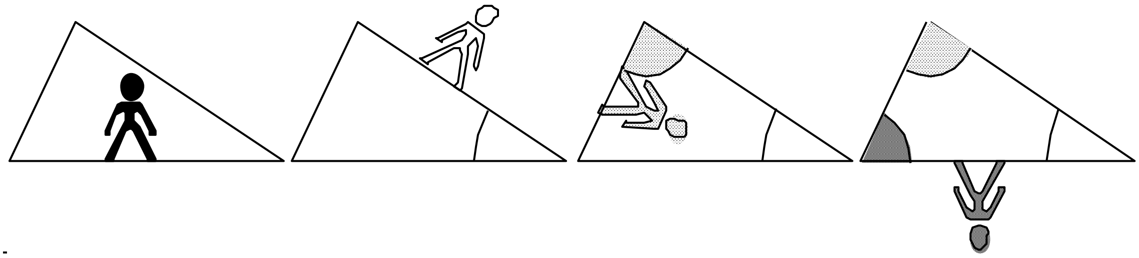
Verdad evidente o que no necesita demostración. Proposición admitida sin demostración. Primeros fundamentos de una ciencia.



Algo sorprendente es la correspondencia entre nuestra lógica interna, mental y las leyes con las que funciona la naturaleza.

Ejemplo

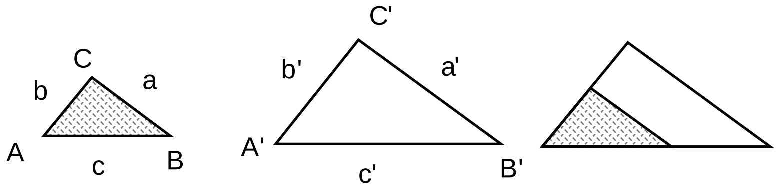
La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°



TEOREMA DE TALES

Si dos triángulos tienen sus **ángulos iguales** entonces sus lados son proporcionales.
Es decir, los triángulos son **semejantes**.

• $\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$



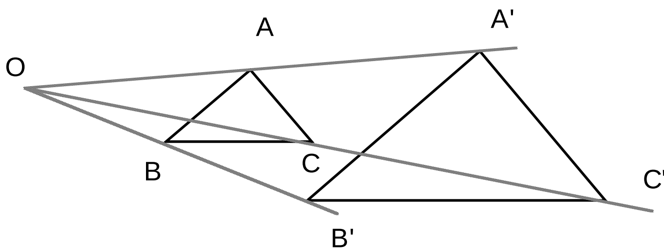
Dos triángulos situados como en la tercera figura se dice que están en posición de Tales.

HOMOTECIA

Procedimiento para construir una figura semejante a otra basada en el teorema de Tales.

Por ejemplo,

Para hacer un triángulo el doble que el inicial, basta elegir un punto fijo del plano O y uniéndolo con A, señalar A' al doble de distancia.
El resto de los vértices se calculan por la intersección de los rayos respectivos con las paralelas a los lados.



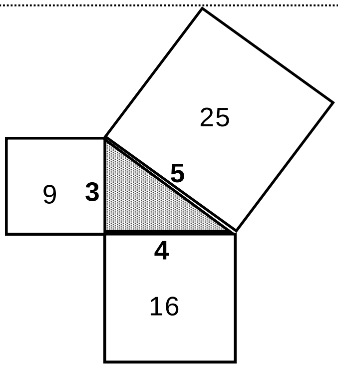
Dependiendo de donde pongamos O así saldrá la posición del otro triángulo.

Con el resto de figuras se procederá de la misma forma. Apoyándonos en la triangulación de ellas.

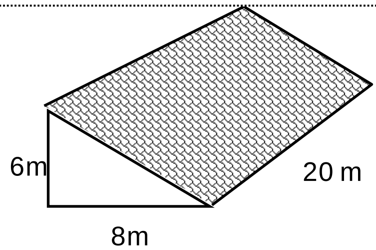
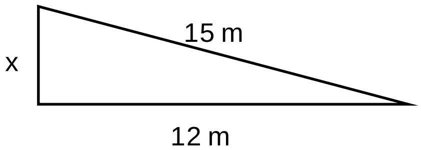
3. TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

TEOREMA DE PITÁGORAS

El triángulo rectángulo tiene una relación curiosa entre sus lados que ya descubrieron las civilizaciones más antiguas.

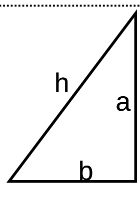
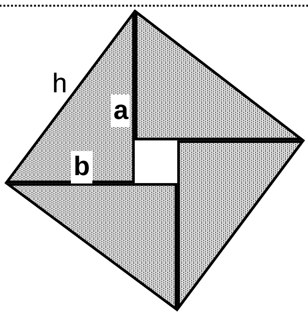
	El cuadrado de la hipotenusa es como la suma de los cuadrados de los catetos.	$5^2 = 4^2 + 3^2$

Así pues, si conocemos el valor de 2 lados de un triángulo rectángulo podemos calcular el otro.

	Por ejemplo, este tejado, ¿qué superficie tendrá?
	La rampa de acceso al Instituto tiene 15 m de longitud y dista 12 m de la puerta. ¿Qué desnivel salva?

La palabra **cateto** significa en griego lo que **cae perpendicularmente**.

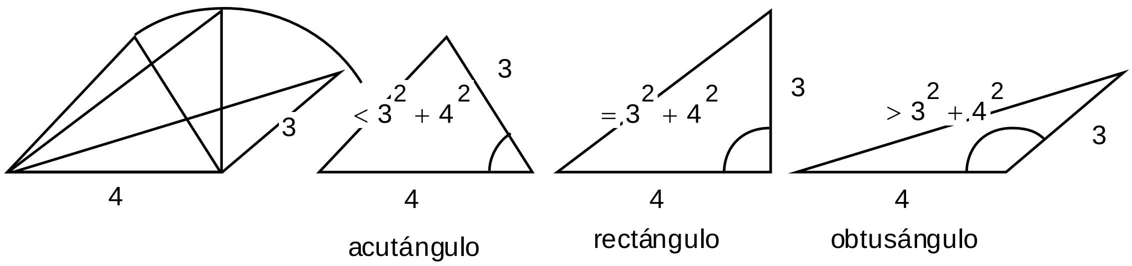
Hipotenusa también es de origen griego y significa **tensar por debajo.** Hace alusión a la forma primitiva de los constructores de trazar un ángulo recto.

 	Demostración del teorema de Pitágoras: Área del cuadrado es igual a 4 veces la del triángulo + el cuadrado interior. $h^2 = 4\frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2$

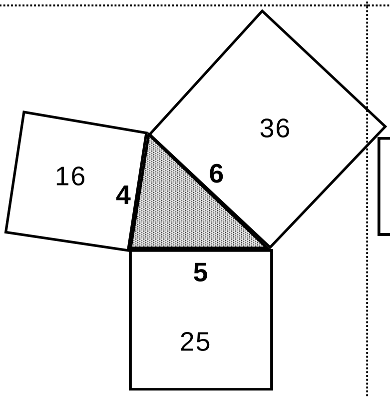
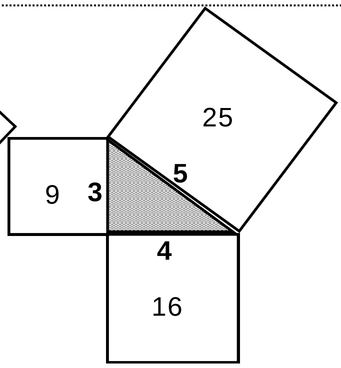
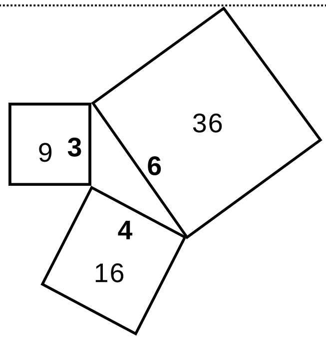
Clasificación de los triángulos según el valor de sus lados

Podemos clasificar a los triángulos conocido el valor de los lados sin necesidad de calcular sus ángulos

El teorema de Pitágoras me permite clasificar los triángulos sin necesidad de medir sus ángulos:



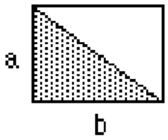
Expresado más gráficamente:

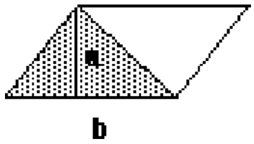
Acutángulo	**Rectángulo**	**Obtusángulo**
		
$4^2 + 5^2 > 6^2$	$3^2 + 4^2 = 5^2$	$3^2 + 4^2 < 6^2$
Suma de los cuadrados menores es mayor al del mayor	Suma de los cuadrados menores es igual al del mayor.	Suma de los cuadrados menores es menor al del mayor .

FÓRMULA DE HERON

ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área del triángulo rectángulo es la mitad del rectángulo que lo contiene:





$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

HERÓN

Pero medir la altura de un triángulo; por ejemplo, en un terreno, no es tan sencillo y puede ser un poco engorroso

Este matemático de la Antigüedad descubrió el medio para calcular el área sin necesidad de tener los datos de la altura sino conociendo tan sólo el valor de los lados:

PERÍMETRO

El perímetro de un triángulo es lo que suman sus lados

El área de un triángulo según esta fórmula es:

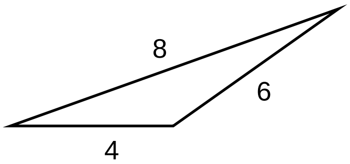
$$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

donde *s* = semiperímetro del triángulo y *a, b, c* los lados.

Para hacer los cálculos nos podemos ayudar con una tabla como la siguiente:

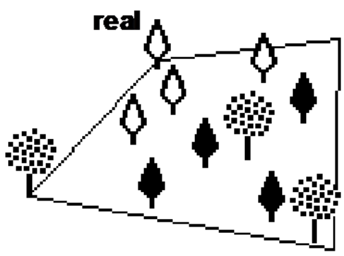
Lado a	Lado b	Lado c	Perímetro a + b + c	s	s – a	s – b	s – c	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

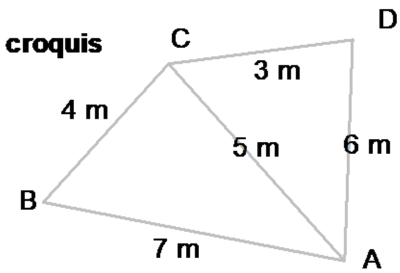
Por ejemplo, vamos a calcular el área de una finca triangular que tenga las siguientes dimensiones: (con una fila de la tabla tenemos bastante)



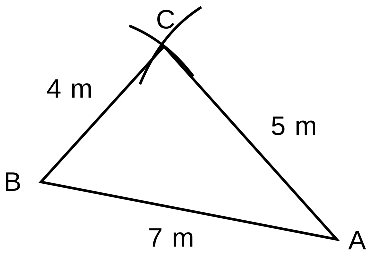
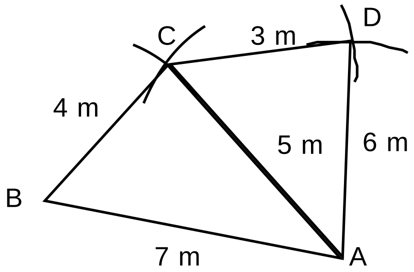
DIBUJO PLANO

Por eso si quisiera hacer en casa un plano de una finca como la de la figura lo mejor es triangular el terreno. Así no hace falta medir ángulos cosa que es difícil.





Al llegar al estudio con las medidas de vértice a vértice se dibujará fácilmente:

Primer paso:	Segundo paso:
	

4. LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Conjunto de puntos que verifican una cierta propiedad.

La forma de hallar la ecuación de un l.g. es la siguiente:

1. Llamar P(x, y) a los puntos del l.g.
2. Imponerles las condiciones que tienen que cumplir.
3. Simplificar o resolver la ecuación resultante.

Mediatriz

Bisectriz

Arco capaz

Circunferencia

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo llamado centro *O* una longitud fija llamada radio *r*.

$$c = \{P(x, y) / d(P, O) = r\}$$

Elementos: O(a, b) y radio r.

Elipse

Se puede dibujar en la pizarra con ayuda y desde el dibujo ir definiendo todos sus elementos.

Elipse significa etimológicamente "insuficiente". Hace referencia a que la inclinación del plano que genera la curva es inferior al de la generatriz del cono.

Como lugar geométrico se ha descubierto que se puede definir así:

$e = \{P(x, y) / d(P, F) + d(P, F') = k\}$

Hipérbola

Hipérbola significa etimológicamente "exceso". En este caso la inclinación del plano de corte excede al de la generatriz del cono.

La figura que resulta tiene dos ramas.

Como lugar geométrico se ha descubierto una definición también sencilla:

$$h = \{P(x,y) / |d(P,F) - d(P,F')| = k\}$$

Parábola

Parábola está emparentada con paralelo. Por la inclinación del plano de sección. En este caso la inclinación del plano de corte es igual al de la generatriz del cono.

La figura que resulta tiene una única rama.

Como lugar geométrico se ha descubierto una definición también sencilla. Ahora aparecen un foco y una recta llamada directriz.

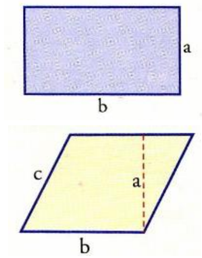
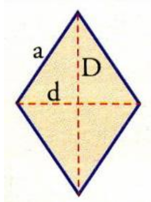
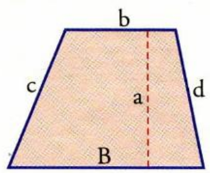
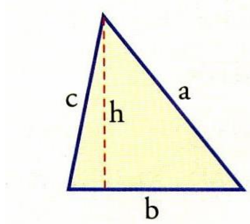
$$p = \{P(x,y) / d(P,F) = d(P,r)\}$$

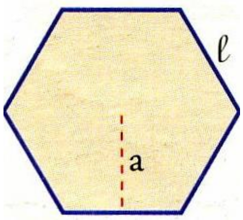
Es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo F y una recta d -llamada directriz-.

El parámetro de la parábola es la distancia entre el foco y la directriz que llamaremos p.

5. ÁREA DE LOS POLIGONOS

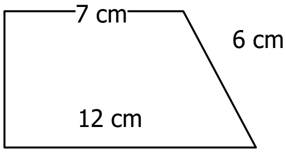
QUADRILATERALS

Rectangles and rhomboids This is the simplest shape to calculate these measurements. The area is the resulting product of its base by its height.		$A = b \cdot a$
Rhombus (rhombuses or rhombi) The area is half of the resulting product of its diagonals.		$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$
Trapezium (trapeziums or trapezia) The area is the result of multiplying half the sum of the bases times the height.		$A = \dfrac{(B+b)}{2} \cdot a$
Triangles The area of a triangle is half of the base times the height. The other one is the Heron formula.		$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s: semiperimeter$

Regular polygon We deduce its formula from the triangle. The area of a regular polygon is half of the perimeter times the apothem.		$A = \frac{p \cdot a}{2}$

Example:

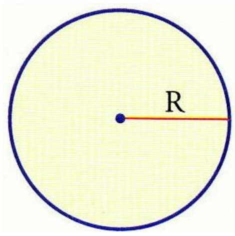
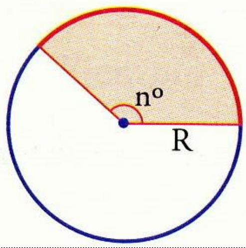
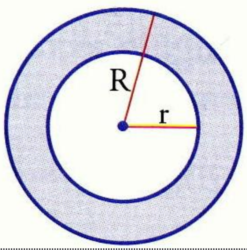
Calculate the height of the next right-angled trapezium whose bases are 7cm and 12 cm and the other side is 6cm. Calculate the area.



PERIMETER AND AREA OF CIRCUMFERENCE AND CIRCLE

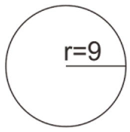
The second kind of shapes you find in nature is the curved lines.

The simplest form among them it is the circumference. You see this shape in the sun, in the moon and it is very easy to make because you only need a radius.

Circumference and circle The length of a circumference is $2 \cdot \pi \cdot R$. The surface area is $\pi \cdot R^2$. π is close to 3 but it is impossible to get its exact value as a decimal number. This is the reason why sometimes we use 3.14 and other times 3.1416. It depends on the accuracy you want.		$L = 2\pi r$ $A = \pi r^2$
Arches and sectors We get the length of an arch or the area of a circular sector through a proportion.		$L = \frac{2\pi R}{360} \cdot n^{o}$ $A = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n^{o} = \frac{L.R}{2}$
Annulus or circular ring The surface of a circular ring we can deduce easily.		$A = \pi R^2 - \pi r^2$

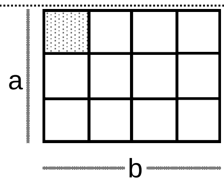
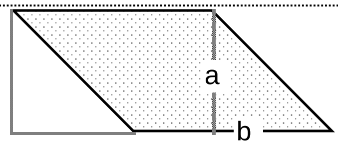
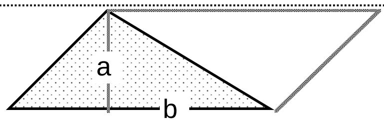
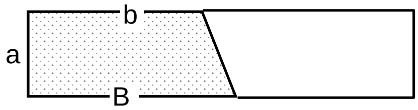
Example:

The radius of a circumference is 9 inches, calculate the length and the area.

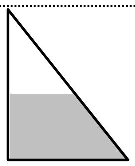
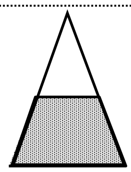
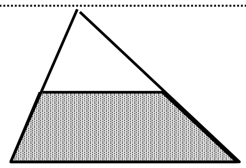


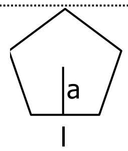
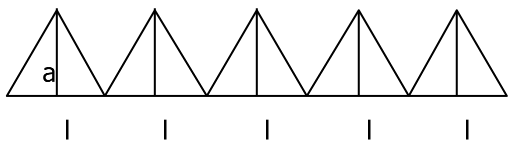
ALGUNAS DEDUCCIONES DE ÁREAS Y LONGITUDES

CUADRILATEROS

Rectángulo: $S = a \cdot b$	
Paralelogramo: $S = a \cdot b$	
Triángulo: $S = \frac{a \cdot b}{2}$	
Trapecio: $S = \frac{(b + B) \cdot a}{2}$	

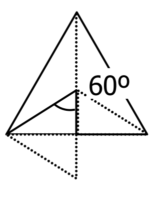
TRAPECIOS

Rectángulo	**Isósceles**	**Escaleno**
		

Polígonos regulares: $S = \frac{p \cdot a}{2}$	 

Apotema de un triángulo equilatero:

$$a = \frac{1}{3}h$$

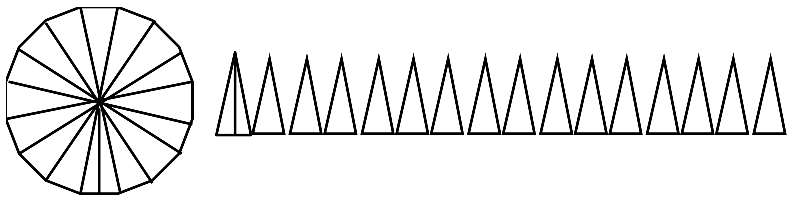


Ángulo interior de un polígono regular

Deducción de su valor: $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n}$

Figuras curvas

Circunferencia



$$S = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

SECTOR CIRCULAR O TRIÁNGULO CIRCULAR

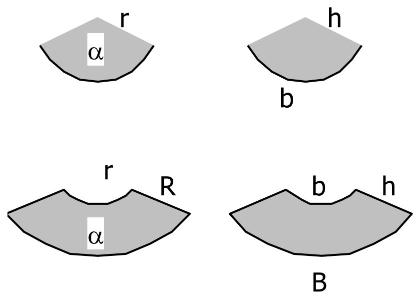
Longitud: $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360}$

Superficie: $\dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$

Triángulo circular: $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$

Corona circular: $\pi \cdot (R^2 - r^2)$

Trapecio circular: $S = \dfrac{B+b}{2} \cdot h$



Deducciones

Del triángulo circular:

longitud	superficie
$2\pi h$	πh^2
b	x

$$\rightarrow x = \frac{\pi h^2 \cdot b}{2\pi h} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Del trapecio circular:

El área del trapecio circular es $\dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360} = \dfrac{\pi \cdot (R+r) \cdot (R-r) \cdot \alpha}{2} =$

$$= \frac{\pi \cdot (R+r) \cdot h \cdot \alpha}{2} = h \cdot \frac{\pi R\alpha + \pi r\alpha}{2} = h \cdot \frac{B+b}{2}$$